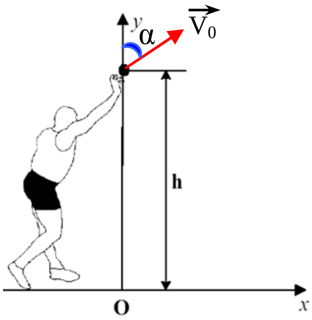
Devoir n° 5 :

EXERCICE TYPE : PROJECTILE

Lors des championnats du monde d'athlétisme qui eurent lieu à Paris en août 2003, le vainqueur de l'épreuve du lancer du poids (Andrey Mikhnevich) a réussi un jet à une distance D = 21,69 m.
Pour simplifier les raisonnements, on ne travaillera que sur le centre d'inertie du boulet (nom courant donné au poids).

L'entraîneur de l'un de ses concurrents souhaite étudier ce lancer. Pour cela il dispose pour le centre d'inertie du boulet, en plus de la valeur 21,69m du record, de la vitesse initiale v_0 mesurée à l'aide d'un cinémomètre et de l'altitude h.
Données: $v_0 = 13,7\ m.s^{-1}$ $h = 2,62\ m$

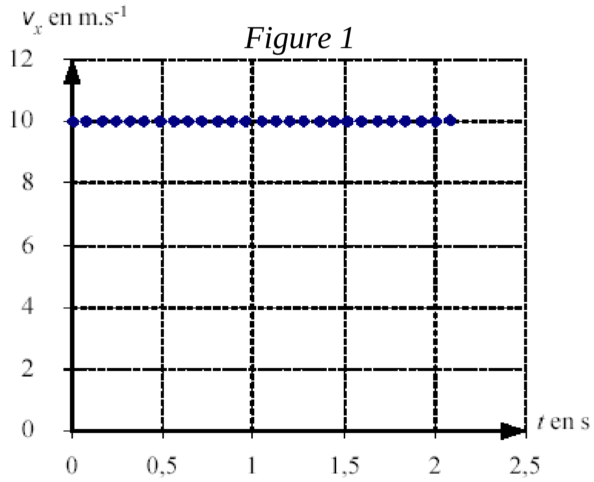
Un logiciel informatique lui permet de réaliser une simulation de ce lancer et de déterminer la valeur de l'angle du vecteur vitesse initiale avec la verticale soit $\alpha = 47°$.

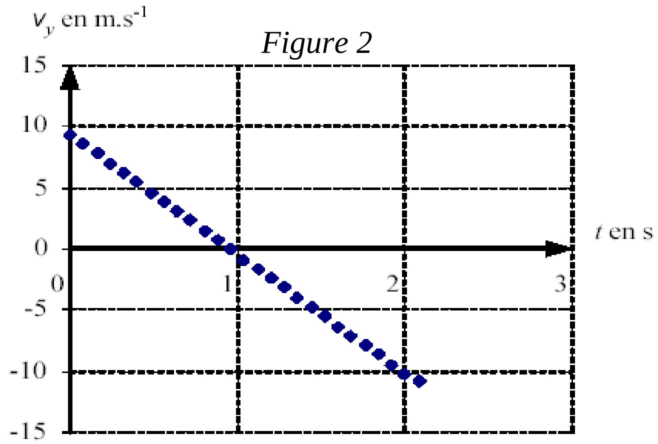


Pour l'étude on définit le repère d'espace (O,x,y) représenté ci-contre:
- Oy est un axe vertical ascendant passant par le centre d'inertie du boulet à l'instant où il quitte la main du lanceur.
- Ox est un axe horizontal au niveau du sol, dirigé vers la droite et dans le plan vertical de la trajectoire.

L'entraîneur a étudié le mouvement du centre d'inertie du boulet et a obtenu 3 graphes:
- le graphe de la trajectoire y = f(x) du boulet donné page suivante.
- les graphes de v_x et de v_y en fonction du temps (figures 1 et 2 données ci-dessous) où v_x et v_y sont les composantes (ou coordonnées) horizontales et verticale du vecteur vitesse.

Pour chacun des graphes, les dates correspondant à deux points successifs sont séparées par le même intervalle de temps.





1. Étude des résultats de la simulation.

1.1. Étude de la projection horizontale du mouvement du centre d'inertie du boulet. En utilisant la figure 1, déterminer:

1.1.1. La composante v_{0x} du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet à l'instant de date t = 0 s.

1.1.2. La nature du mouvement de la projection du centre d'inertie sur l'axe Ox en justifiant la réponse. Comment justifier ce mouvement en utilisant les lois de Newton ?

1.2. Étude des conditions initiales du lancer.

1.2.1. En utilisant la figure 2, déterminer la composante v_{0y} du vecteur vitesse à l'instant de date t = 0 s.

1.2.2. À partir des résultats précédents, vérifier que la valeur de la vitesse instantanée et l'angle de tir sont compatibles avec les valeurs respectives $v_0 = 13,7\ m.s^{-1}$ et $\alpha = 47°$ données dans le texte.

1.3. Étude du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet au sommet S de la trajectoire.

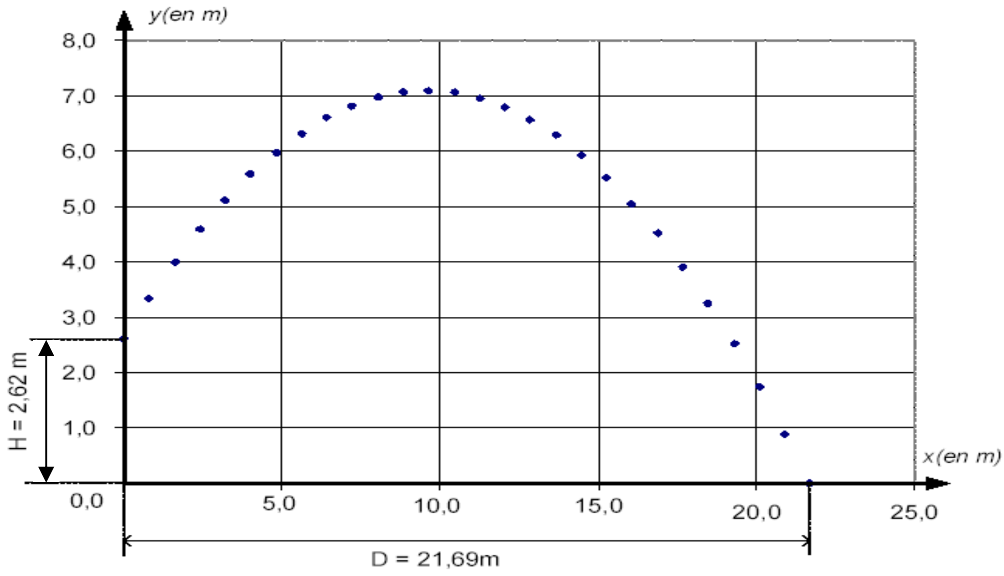
Déterminer toutes les caractéristiques de ce vecteur vitesse.
A quel instant le boulet atteint-il ce point S ?

2. Étude théorique du mouvement du centre d'inertie.

2.1. Par application de la 2ème loi de Newton (ou théorème du centre d'inertie), dans le référentiel terrestre supposé galiléen, déterminer le vecteur accélération du centre d'inertie du boulet lors du mouvement (on supposera que, compte tenu des faibles vitesses atteintes, les frottements dus à l'air au cours du jet sont négligeables).

2.2. Dans le repère d'espace défini en introduction, déterminer les équations horaires du mouvement du boulet.

2.3. En déduire l'équation de la trajectoire de son centre d'inertie.



3. Comment améliorer la performance d'un lanceur ?

L'entraîneur veut ensuite savoir sur quel(s) paramètre(s) il peut travailler pour améliorer la performance de l'athlète. Celui-ci est plus petit que le recordman du monde, sa taille est telle que l'altitude initiale de ses lancers n'est au maximum que de h' = 2,45 m.

L'entraîneur décide donc d'étudier l'influence de la valeur v_0 de la vitesse initiale du lancer et de l'angle de tir α.

Il réalise des séries de simulations rassemblées dans les réseaux de courbes correspondants aux figures 3 et 4.

Sur la figure 3, l'angle de tir est maintenu constant soit $\alpha = 49°$

Sur la figure 4, la vitesse est maintenue constante soit $v_0 = 13,8 \text{ m.s}^{-1}$

Figure 3 ($\alpha = 49°$)

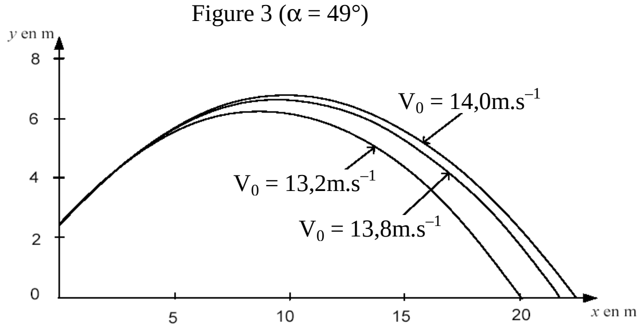
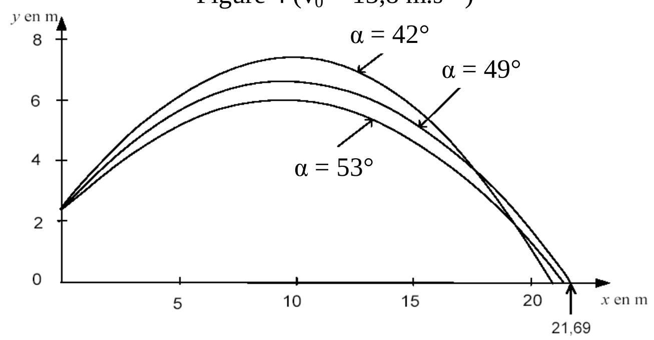


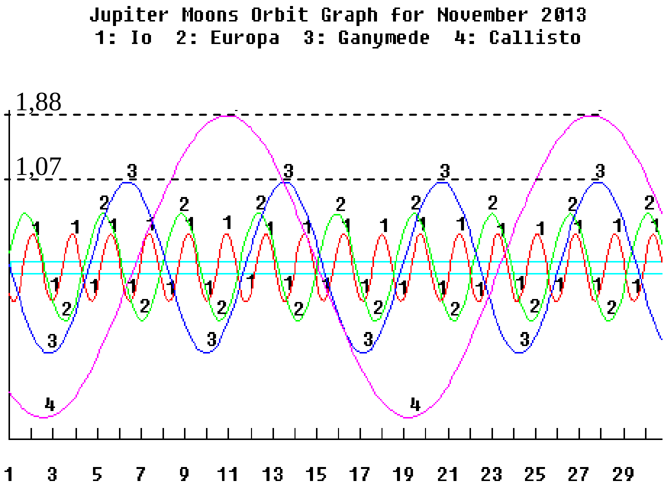
Figure 4 ($v_0 = 13,8 \text{ m.s}^{-1}$)



3.1. À partir des figures 3 et 4, préciser comment varie la longueur du jet en fonction de l'angle α, puis en fonction de la vitesse initiale V_0 du lancer.

3.2. Confronter les figures 3 et 4 pour en déduire si, parmi les combinaisons proposées, il en existe une satisfaisante pour battre le record du monde. Justifier la réponse.

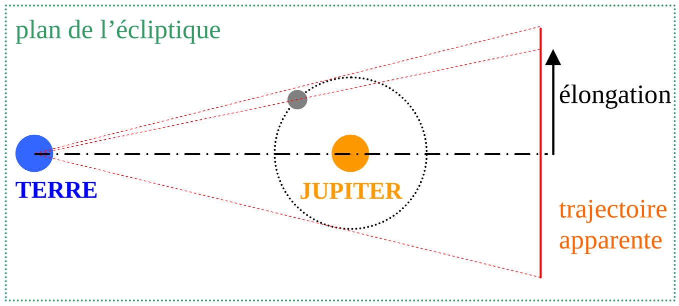
EXERCICE TYPE : LOIS DE KEPLER



Documents :

La planète Jupiter est la plus massique du système solaire.
Elle possède 67 satellites naturels.
Les premières lunes de Jupiter furent découvertes en 1610, lorsque Galilée pointa sa lunette astronomique vers cet astre.
Il les nomma: Io, Europe, Ganymède et Callisto.

Ces satellites se déplacent dans le plan de l'équateur de la planète qui est peu incliné par rapport au plan de l'écliptique dans lequel se déplacent les planètes autour du soleil.
De ce fait, le mouvement apparent des satellites de Jupiter, observé depuis la terre, semble être rectiligne.
Les courbes ci-contre représentent leurs élongations (en million de km) en fonction des jours du mois de novembre 2013.



La troisième loi de Képler s'écrit : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M}$

G = $6{,}67.10^{-11}$ S.I. = constante de la gravitation universelle.

Les trajectoires des satellites seront assimilées à des cercles de rayon R.
On rappelle que pour un mouvement circulaire uniforme de vitesse V, la valeur de l'accélération est V^2/R.

Questions :

1. Enoncer la troisième loi de Képler sous forme d'une phrase, en précisant à quoi correspondent T, a et M de façon générale pour une orbite elliptique. On s'aidera d'un schéma.

2. Déterminer l'unité de G dans le système international.

3. Lequel de ces deux schémas correspond à la disposition des satellites de Jupiter observé depuis la terre le premier novembre 2013 ? justifier la réponse.

   Pourquoi n'observe-t-on que 3 satellites ?
   Refaire le schéma sur la feuille en précisant les noms des satellites à côté de leur emplacement.

4. Faire un schéma représentant Jupiter et un de ses satellites sur son orbite.
   Choisir un vecteur unitaire radial et l'utiliser pour exprimer la force de gravité $\vec{F}$ exercée par Jupiter sur ce satellite en fonction de la masse M de la planète, la masse m du satellite, la constante de la gravitation universelle G et le rayon de l'orbite R.

5. Définir le référentiel Jupitérocentrique.
   Appliquer la deuxième loi de Newton au satellite dans ce référentiel.
   En déduire que $V^2 = G.M/R$ où V est la vitesse du satellite sur son orbite.

6. Retrouver ainsi par le calcul la troisième loi de Képler.

7. Déterminer à partir des documents fournis la masse de Jupiter.

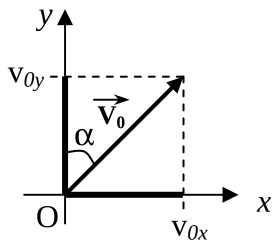
Corrigé de l'exercice « lancer du poids » :

1. Étude des résultats de la simulation.

1.1. Étude de la projection horizontale du mouvement du centre d'inertie du boulet.

1.1.1. D'après la figure 1, on lit $\mathbf{v_{0x} = 10\ m.s^{-1}}$.
1.1.2. v_x est constante, donc la projection du centre d'inertie sur l'axe Ox correspond à un **mouvement rectiligne uniforme**. Ceci est en accord avec la première loi de Newton car aucune force n'agit horizontalement.

1.2. Étude des conditions initiales du lancer.

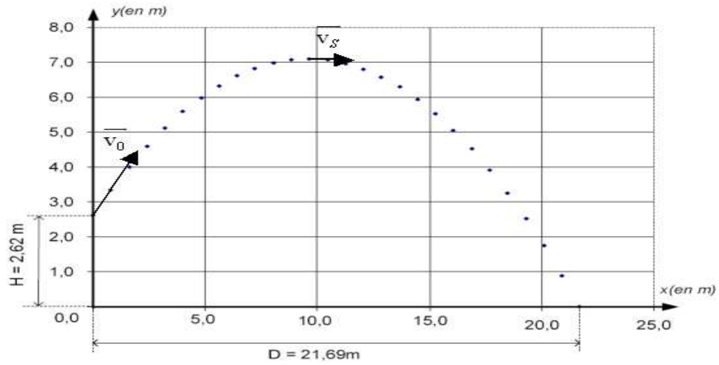


1.2.1. D'après la figure 2, on lit $\mathbf{v_{0y} = 9\ m.s^{-1}}$. (lecture peu précise)

1.2.2. $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{10^2+9^2} = \mathbf{14\ m.s^{-1}}$

D'après la figure ci-contre: $\sin\alpha = \dfrac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\dfrac{v_{0x}}{v_0} = \sin^{-1}\dfrac{10}{13,7} = \mathbf{47°}$

1.3. Étude du vecteur vitesse du centre d'inertie du boulet.



1.3.1. Au sommet de la trajectoire, le vecteur vitesse a une direction horizontale, un sens orienté vers la droite,
et pour valeur $v_S = \sqrt{v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = \mathbf{10\ m.s^{-1}}$
En effet, au sommet de la trajectoire, y passe par un maximum donc sa dérivée v_y s'annule. Cela se produit pour **t = 0,95s**.
On lit sur la figure 1 la valeur de $v_x = 10\ m.s^{-1}$.

2. Étude théorique du mouvement du centre d'inertie

2.1. Système : le boulet
Référentiel: le sol, référentiel terrestre supposé galiléen
Inventaire des forces extérieures: le poids $\vec{P}$, les autres forces (frottement, PA) négligeables face au poids.

D'après la deuxième loi de Newton: $\vec{P} = m.\vec{a}$ soit $m.\vec{g} = m.\vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$.
Le vecteur accélération est vertical, orienté vers le bas, de valeur égale à $g = 9,81\ m.s^{-2}$.

2.2. Dans le repère d'espace défini en introduction :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ donc par intégration } \qquad \vec{v}\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0.\sin\alpha \\ v_y = -g.t + v_{0y} = -g.t + v_0.\cos\alpha \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{OG}$ le vecteur position du centre d'inertie du boulet, on a $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ et par intégration

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0.(\sin\alpha).t + x_0 \\ y = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.(\cos\alpha).t + y_0 \end{cases}$$

À la date t = 0, G a pour coordonnées ($x_0 = 0$; $y_0 = h$) ainsi

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0.(\sin\alpha).t \\ y = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.(\cos\alpha).t + h \end{cases}$$

2.3. Trajectoire y=f(x) du centre d'inertie ?

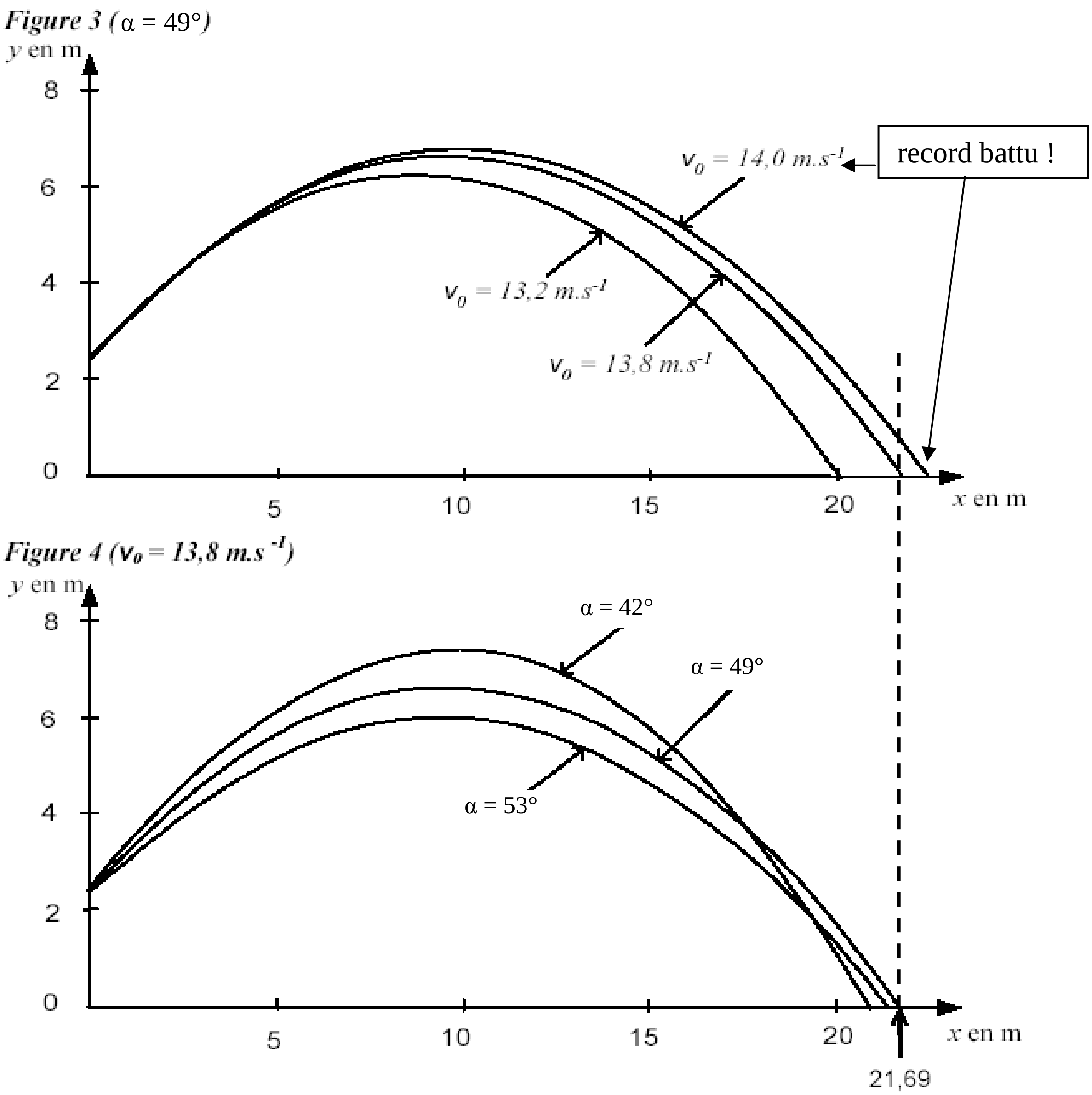
$x = v_0.(\sin).t$ donc $t = \dfrac{x}{v_0.(\sin\alpha)}$, on remplace t par cette expression

$$y = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.(\sin\alpha)}\right)^2 + v_0.(\cos\alpha)\frac{x}{v_0.(\sin\alpha)} + h \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = -\frac{g}{2(v_0.(\sin\alpha))^2}.x^2 + (\cot\alpha).\ x + h}$$

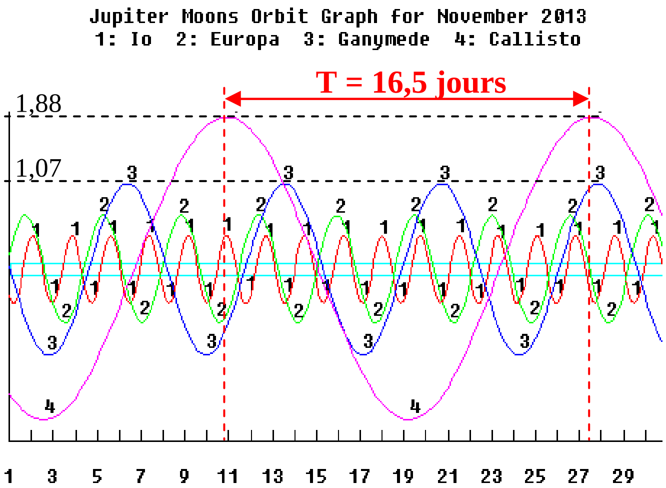
3. Comment améliorer la performance du lanceur

3.1. La longueur du jet augmente lorsque la vitesse initiale augmente.
La longueur du jet augmente lorsque l'angle α augmente de 42° à 49° mais diminue lorsque l'angle α augmente de 49° à 53°. Il existe donc un angle optimal au voisinage de 49°.

3.2. Le record du monde est D = 21,69 m
La figure 4 montre qu'avec $v_0 = 13{,}8\ m.s^{-1}$, il est possible d'égaler le record du monde si $\alpha = 49°$.
La figure 3 montre qu'avec $v_0 = 14{,}0\ m.s^{-1}$ et $\alpha = 49°$, le record du monde peut être battu.



Corrigé de EXERCICE TYPE : LOIS DE KEPLER



Documents :

La planète Jupiter est la plus massique du système solaire.
Elle possède 67 satellites naturels.
Les premières lunes de Jupiter furent découvertes en 1610, lorsque Galilée pointa sa lunette astronomique vers cet astre.
Il les nomma: Io, Europe, Ganymède et Callisto.

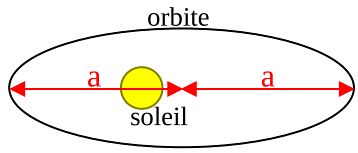
Ces satellites se déplacent dans le plan de l'équateur de la planète qui est peu incliné par rapport au plan de l'écliptique dans lequel se déplacent les planètes autour du soleil.
De ce fait, le mouvement apparent des satellites de Jupiter, observé depuis la terre, semble être rectiligne.
Les courbes ci-contre représentent leurs élongations (en million de km) en fonction des jours du mois de novembre 2013.

La troisième loi de Képler s'écrit : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4.\pi^2}{G.M}$ G = $6{,}67.10^{-11}$ S.I. = constante de la gravitation universelle.

Les trajectoires des satellites seront assimilées à des cercles de rayon R.
On rappelle que pour un mouvement circulaire uniforme de vitesse V, la valeur de l'accélération est V^2/R.

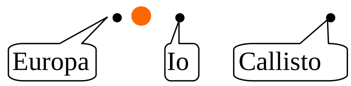
Questions :

8. Troisième loi de Képler: le carré de la période de révolution **T** d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du demi grand-axe **a** de son orbite. Le coefficient de proportionnalité fait intervenir la masse **M** du soleil.



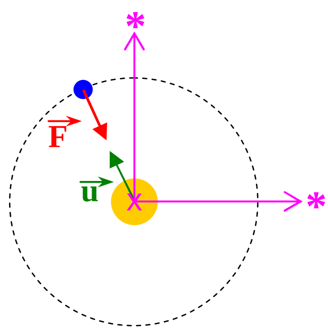
9. $[G] = [a]^3 / [T]^2 \times [M] = m^3.s^{-2}.kg^{-1}$ puisque $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4.\pi^2}{G.M}$

10. La disposition des satellites de Jupiter le premier novembre 2013 est :
puisque ce jour-là Ganymède est derrière Jupiter donc non visible
Europa est d'un côté de la planète
tandis que Io est de l'autre côté en compagnie de Callisto qui est plus éloigné



11. Force gravitationnelle exercée par Jupiter sur un satellite : $\vec{F} = -G.\dfrac{M.m}{R^2}\vec{u}$

12. Le référentiel Jupitérocentrique (en rose ci-contre) est un repère mathématique centré sur le centre de Jupiter et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines « fixes » (c'est-à-dire se déplaçant dans la direction de l'observation.



* Système : { satellite } * Référentiel : jupiterocentrique

* Forces extérieures : force de gravité $\vec{F} = -G.m.M/R^2\ \vec{u}$

* Expression de l'accélération du satellite: $\vec{a} = -V^2/R\ \vec{u}$

* La 2ème loi de Newton s'écrit : $\vec{F} = m.\vec{a}$

* Projection sur le vecteur $\vec{u}$: $-G.m.M/R^2 = -m.V^2/R$

Après simplification par m, on obtient $G.M/R = V^2$

13. Période de révolution du satellite = périmètre de l'orbite / vitesse donc $T = 2.\pi.R / V$

Soit en élevant au carré : $T^2 = 4.\pi^2.R^2 / V^2 = 4.\pi^2.R^3/G.M$

On vérifie que $\boxed{T^2/R^3 = 4.\pi^2/G.M = C^{te}}$ pour tous les satellites de Jupiter: c'est la 3ème loi de Kepler.

La détermination de la valeur de cette constante permet de calculer la masse M de Jupiter: $M = 4.\pi^2/G.C^{te}$

14. Les documents fournis permettent de déterminer pour le satellite Callisto : $R = 1{,}88.10^6$ km $= 1{,}88.10^9$ m
et T = 16,5 jours = $16{,}5 \times 24 \times 3600 = 1{,}43.10^6$ s donc $C^{te} = T^2/R^3 = 3{,}08.10^{-16}$ S.I.
On calcule ainsi : $M = 4.\pi^2/(6{,}67.10^{-11} \times 3{,}08.10^{-16}) =$ **$1{,}95.10^{27}$ kg**.